LA STELLA VIRGIL

La stella Virgil è di tipo F7, un po' più grande di Sol, più luminosa d'un buon cinquanta per cento, con una proporzione d'ultravioletto, nella sua emissione complessiva, più elevata. Aeneas è il quarto dei suoi pianeti, completa un'orbita intorno a Virgil in 1,73 anni standard[1] *ad una distanza media di 1,5 unità astronomiche, ricevendo quindi un'irradiazione che ammonta ai due terzi di quella della Terra. Il suo diametro medio è di 10.700 km, la sua massa 0,45 rispetto a quella della terrestre e perciò la gravità di superficie è 0,635g.*
Così si legge nel romanzo di fantascienza di Poul Anderson *The Rebel Worlds* del 1969. Più avanti, nello stesso romanzo, si parla di Dido, il terzo pianeta del sistema e si legge:
"*Il* Manuale del Pilota con Effemeridi *del sistema virgiliano indicava che Dido percorreva un'orbita moderatamente eccentrica il cui raggio vettore era mediamente di una unità astronomica; la massa, il diametro e di conseguenza la gravità di superficie erano un po' inferiori di quelli della Terra. Dido ruotava il 8 ore e 47 minuti intorno al proprio asse dall'inclinazione davvero insolita di 38 gradi.*"

Sulla base dei dati riportati nel romanzo si risponda ai seguenti quesiti:

1) Qual è la massa di Virgil in rapporto alla massa del Sole?
2) I dati riportati sull'irradiazione che riceve Aeneas e sulla sua gravità superficiale sono corretti?
3) Qual è la velocità di fuga da Aeneas?
4) Qual è il periodo di rivoluzione di Dido in anni standard? e in giorni di Dido?
5) Qual è il periodo sinodico[2] di Aeneas visto da Dido?
6) La frase "*la massa, il diametro e di conseguenza la gravità di superficie erano un po' inferiori di quelli della Terra*" è sempre vera? In caso negativo si dia un esempio numerico.
7) Qual è il diametro angolare di Aeneas visto da Dido quando i due pianeti sono alla minima distanza?
8) Supponendo per Aeneas un'albedo[3] media di 0,38, all'opposizione, quale sarebbe la magnitudine relativa di questo pianeta visto da Dido? Si tenga presente che Marte ha un'albedo di 0,15, un diametro medio di 6780 km e che quando è in opposizione a 0,5 UA dalla Terra la sua magnitudine relativa è circa -2,0?

SOLUZIONE

Quesito 1

La massa di Virgil (M_V) può essere ricavata della terza legge di Keplero: $\frac{T_A^2}{a_A^3}=\frac{4\pi^2}{GM_V}$ dove T_A e a_A sono rispettivamente il periodo di rivoluzione e il semiasse maggiore di Aeneas. Si può usare la relazione $\frac{T_A^2}{a_A^3}M_V=\frac{T_T^2}{a_T^3}M_S$ dove il termine di destra si riferisce alla Terra e al Sole. Misurando il

---

[1] Nel romanzo non ci sono indicazioni, ma poniamo che un anno standard sia uguale a 365 giorni terrestri.
[2] Ricordiamo che il periodo sinodico è il tempo che impiega un oggetto per ritornare nella stessa posizione nel cielo, rispetto al Sole e osservato dalla Terra. Nel nostro caso è il tempo che passa tra due allineamenti Virgil, Dido, Aeneas.
[3] L'albedo (dal latino albēdo, "bianchezza", che a sua volta deriva da album, "bianco") di una superficie è la frazione di luce o, più in generale, di radiazione incidente che viene riflessa indietro in tutte le direzioni. Essa indica quindi il potere riflettente di una superficie. L'esatto valore della frazione dipende, per lo stesso materiale, dalla lunghezza d'onda della radiazione considerata. L'albedo massima è 1, quando tutta la luce incidente viene riflessa, l'albedo minima è 0, quando nessuna frazione della luce viene riflessa. In termini di luce visibile, il primo caso è quello di un oggetto perfettamente bianco, l'altro di un oggetto perfettamente nero. La Terra ha un'albedo media di 0,37 – 0,39.

periodo in anni e il semiasse maggiore in unità astronomiche e intendendo per anno standard l'anno terrestre, essendo T_T = 1 anno e a_T = 1 UA si ricava: $M_V = \frac{a_A^3}{T_A^2} M_S = \frac{1{,}5^3}{1{,}73^2} M_S = 1{,}13 M_S$.

Quesito 2

Se indichiamo con L_S la luminosità del Sole, la luminosità di Virgil è: L_V = 1,5 L_S. Il flusso luminoso di Virgil alla distanza di Aeneas (F_{VA}) è dato da:

$$F_{VA} = \frac{L_V}{4\pi a_V^2} = \frac{1{,}5 L_S}{4\pi(1{,}5 a_T)^2} = \frac{1}{1{,}5}\frac{L_S}{4\pi a_T^2} = \frac{2}{3} F_{ST}$$

Nell'equazione sopra F_{ST} è il flusso del Sole alla distanza della Terra.

Per la determinazione dell'accelerazione di gravità sulla superficie di Aeneas, osserviamo che il suo raggio è $R_A = 0{,}841 R_T$ (si è utilizzato $R_T = 6370$ km); l'accelerazione è quindi:

$$g_A = G\frac{M_A}{R_A^2} = G\frac{0{,}45 M_T}{(0{,}841 R_T)^2} = \frac{0{,}45}{0{,}841^2}\frac{GM_T}{R_T^2} = 0{,}636 g\ .$$

Quesito 3

La velocità di fuga, v_f, dalla superficie di un pianeta di massa M e raggio R è la velocità che deve avere un corpo per allontanarsi dalla superficie del pianeta senza ricadervi sopra. Per determinare tale velocità bisogna porre l'energia totale del corpo uguale a zero. L'energia totale è data dalla somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale gravitazionale: $E = \frac{1}{2} m v_f^2 - G\frac{Mm}{R} = 0$, da cui, per Aeneas, si ricava:

$$v_{fA} = \sqrt{\frac{2GM_A}{R_A}} = \sqrt{2 \cdot R_A g_A} = \sqrt{2 \cdot (0{,}841 R_T)(0{,}636 g)} = \sqrt{0{,}841 \cdot 0{,}636}\, v_{fT} = 0{,}731 v_{fT} = 7{,}46 \text{ km/s}.$$

Si è utilizzato il valore $v_{fT} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{2 R_T g} = 10{,}2$ km/s.

Quesito 4

Per determinare il periodo di rivoluzione di Dido utilizziamo ancora la terza legge di Keplero; si ha: $\frac{T_A^2}{a_A^3} = \frac{T_D^2}{a_D^3}$ da cui segue $T_D = T_A\sqrt{\frac{a_D^3}{a_A^3}} = 1{,}73\sqrt{\frac{1}{1{,}5^3}} = 0{,}942$ anni standard = 343,7 giorni terrestri.

Poiché un giorno terrestre è uguale a 2,732 giorni di Dido, il periodo di rivoluzione di Dido è di circa 939 suoi giorni.

Quesito 5

Essendo le orbite pressoché circolari, i moti dei pianeti possono essere considerati circolari e uniformi. Se θ_D e θ_A sono gli angoli descritti da Dido e Aeneas nel tempo t intercorso tra due allineamenti, allora deve quindi essere: $\theta_D = \theta_A + 360°$, ossia, per riavere l'allineamento Dido deve fare un giro in più di Aeneas, quindi: $\frac{360°}{T_D} t = \frac{360°}{T_A} t + 360°$ da cui si ricava:

$$t = \frac{T_A T_D}{T_A - T_D} = \frac{1{,}73 \cdot 0{,}942}{1{,}73 - 0{,}942} = 2{,}068 \text{ anni standard.}$$

Quesito 6

Siano p e q due numeri positivi minori di 1 e indichiamo con M_D e R_D la massa e il raggio di Dido. Allora dalle indicazioni del romanzo possiamo scrivere che $M_D = pM_T$ e $R_D = qR_T$.

La gravità superficiale di Dido è quindi

$$g_D = G\frac{M_D}{R_D^2} = G\frac{pM_T}{q^2R_T^2} = \frac{p}{q^2}G\frac{M_T}{R_T^2} = \frac{p}{q^2}g$$

e affinché sia minore di g deve essere $\frac{p}{q^2} < 1$, ossia $p < q^2$. Se, ad esempio, sia la massa che il raggio di Dido fossero dell'1% inferiori a quelli della Terra risulterebbe $M_D = 0{,}99M_T$ e $R_D = 0{,}99R_T$ si avrebbe $g_D = 1.01g$, quindi l'affermazione sarebbe falsa.

Si può vedere meglio la situazione rappresentando in un sistema si assi cartesiani qOp la parabola $p = q^2$, vedi figura a lato. La regione al di sotto della parabola è quella che corrisponde ai valori di p e q per cui l'affermazione è vera ($g_D < g$), mentre in quella sopra corrisponde ai valori per cui è falsa ($g_D > g$), per i valori che definiscono la parabola le due accelerazioni sono uguali; come si può facilmente osservare i casi in cui è falsa (l'area della regione 2/3 in unità arbitrarie) sono di più di quelli in cui è vera (l'area della regione è 1/3 in unità arbitrarie).

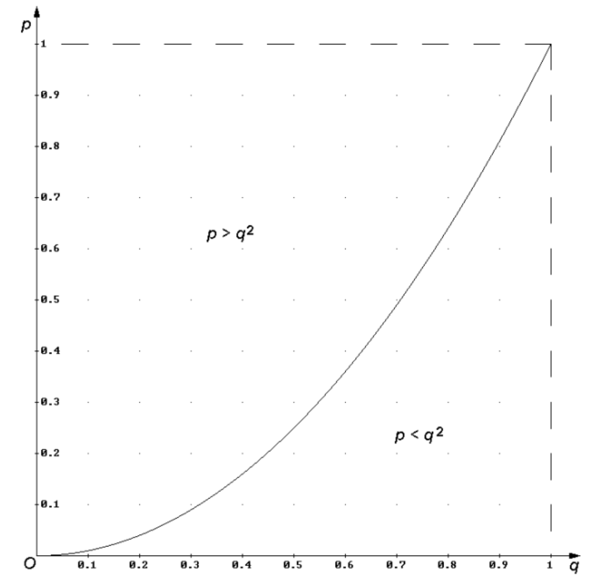


Figura relativa al quesito 6 con illustrata la parabola che permette di determinare le regioni dove l'affermazione è vera o è falsa.

Quesito 7

Alla minima distanza i due pianeti distano d_{AD} = 0,5 UA. Il diametro angolare di Aeneas visto da Dido, all'opposizione, è quindi:

$$\delta_{AD} = 2arctg\frac{R_A}{d_{AD}} = 2arctg\frac{5350}{0{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 10^8} = 29{,}4''$$ dove R_A è il raggio di Aeneas.

Oppure, osservando che il raggio del pianeta è molto minore dalla distanza,

$$\delta_{AD} = 2arctg\frac{R_A}{d_{AD}} = 2\frac{R_A}{d_{AD}} = 2\left(\frac{5350}{0{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 10^8}rad\right)\left(206265\frac{''}{rad}\right) = 29{,}4''$$

Quesito 8

Per calcolare la magnitudine apparente (m_A) di Aeneas utilizziamo le relazione di Pogson nella forma:

$$m_A = m_M - 2{,}5log\frac{F_A}{F_M}$$

dove m_M = -2,0 è la magnitudine apparente di Marte visto dalla Terra quando si trova in opposizione a 0,5 UA da questa[4], F_A e F_M sono i flussi dei due pianeti. Poiché a noi serve il rapporto tra i flussi e la distanza da cui vengono osservati Aeneas e Marte è la stessa (in entrambi casi 0,5 UA). Il flusso luminoso dei due pianeti sarà dato da $F = S \cdot b \cdot L$ dove S è la superficie

[4] L'orbita di Marte è molto eccentrica (e = 0,09341233) e ciò lo porta ad una minima distanza dal Sole a 206 644 545 km = 1,38133346 UA e ad una massima distanza 249 228 730 km = 1,66599116 UA. Quando avvengono le opposizioni perieliche (Marte vicino al perielio e la Terra vicino all'afelio), ogni circa 15-17 anni, i due pianeti raggiungono la minima distanza (teoricamente 54 546 844 km = 0,364623127 UA) e ciò comporta delle ottime condizioni per l'osservazione di Marte. In questa circostanza il pianeta rosso può raggiungere anche una magnitudine apparente di circa -3.0 e il suo disco planetario una dimensione angolare di 25,10". La più stretta degli ultimi e dei prossimi millenni si è verificata 27 agosto 2003 (55 758 006 km).

illuminata, b l'albedo e L la quantità di luce che ricevono dal proprio sole.
Le superfici si calcolano facilmente tenendo conto che all'opposizione l'osservatore vede metà del globo planetario ($S = 2\pi R^2$); le albedo sono note; la quantità di luce che Aeneas riceve dalla propria stella è stata data in relazione a quella che la Terra riceve dal Sole (L_{ST}), possiamo quindi esprimere anche la quantità di luce che riceve Marte da Sole (L_{SM}) in funzione di tale valore.

Ricordando che $L_{ST} = \dfrac{L_S}{4\pi d_{ST}^2}$ e che $L_{SM} = \dfrac{L_S}{4\pi d_{SM}^2}$ si ha: $L_{ST}\, d_{ST}^2 = L_{SM}\, d_{SM}^2$ da cui segue

$$L_{SM} = L_{ST}\,\frac{d_{ST}^2}{d_{SM}^2} = \left(\frac{1}{1{,}5}\right)^2 L_{ST} = \frac{4}{9} L_{ST}\ .$$

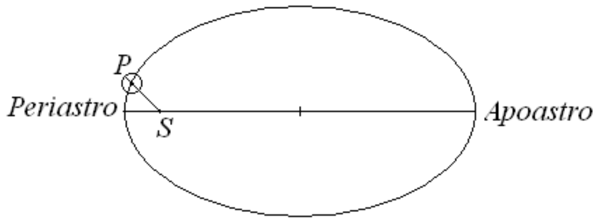
Si ha quindi:

$$m_A = m_M - 2{,}5\,log\,\frac{F_A}{F_M} = m_M - 2{,}5\,log\,\frac{S_A \cdot b_A \cdot L_A}{S_M \cdot b_M \cdot L_M} = m_M - 2{,}5\,log\,\frac{2\pi R_A^2 \cdot b_A \cdot \frac{2}{3} L_{ST}}{2\pi R_M^2 \cdot b_M \cdot \frac{4}{9} L_{ST}} =$$

$$= m_M - 2{,}5\,log\,\frac{3R_A^2 \cdot b_A}{2R_M^2 \cdot b_M} = -2{,}0 - 2{,}5\,log\,\frac{3 \cdot 5350^2 \cdot 0{,}38}{2 \cdot 3390^2 \cdot 0{,}15} = -4{,}4$$

All'incirca la magnitudine media di Venere vista dalla Terra.

EQUINOZI E SOLSTIZI



Nella figura a lato è data l'orbita di un pianeta *P* intorno alla propria stella *S*; il verso del moto è quello antiorario. Il circoletto è il pianeta e la linea sul circoletto rappresenta la proiezione dell'asse di rotazione del pianeta sul piano dell'orbita. Nel disegno il pianeta è disegnato nel punto dell'orbita relativo al solstizio d'inverno per l'emisfero nord (i termini sono gli stessi che utilizziamo per la Terra) e quindi la proiezione dell'asse di rotazione passa per la stella *S*. Nel disegno stiamo osservando l'orbita come se stessimo nel Polo Nord dell'eclittica e l'ellisse è estremamente eccentrica (e = 0,8).

1. Disegnare la posizione del pianeta nel solstizio d'estate e negli equinozi spiegando il perché della posizione.
2. Come influisce l'eccentricità dell'orbita sulla durata delle stagioni?
3. E l'inclinazione dell'orbita?
4. Qual è il rapporto tra il diametro angolare della stella quando il pianeta si trova al periastro e all'apoastro?
5. Qual è il rapporto tra la radiazione che il pianeta riceve al periastro e quella che riceve all'apoastro?
6. Nel caso in cui il solstizio d'inverno avvenga nel preciso istante in cui il pianeta si trova al periastro, quanto durerebbero le stagioni? Si esprima il risultato in anni del pianeta (un anno = tempo che il pianeta impiega a percorrere la sua orbita); per semplificare i calcoli si può porre il semiasse maggiore dell'orbita a = 1 UA.

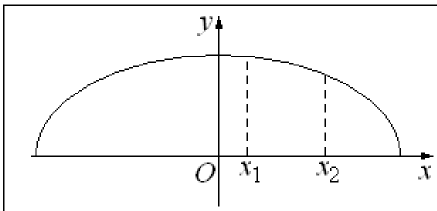


Figura relativa all'aiuto per il quesito 6 con illustrata l'area A che si calcola utilizzando la formula.

Aiuto per il quesito 6. Si ricordi che per un'ellisse di semiasse maggiore a e semiasse minore b, l'area della regione compresa tra l'ellisse, le linee tratteggiare corrispondenti ai punti di ascissa x_1 e x_2 (non importa quale sia la loro posizione sull'asse x purché sia $x_1 < x_2$) e l'asse x, è data da:

$$A = \frac{ab}{2}\left(arcsen\frac{x_2}{a} - arcsen\frac{x_1}{a}\right) + \frac{b}{2a}\left(x_2\sqrt{a^2 - x_2^2} - x_1\sqrt{a^2 - x_1^2}\right)$$

L'area dell'ellisse è $A = \pi ab$ e l'eccentricità è data da $e = c/a$ dove c è la distanza della stella dal centro dell'ellisse.

SOLUZIONE

Quesito 1

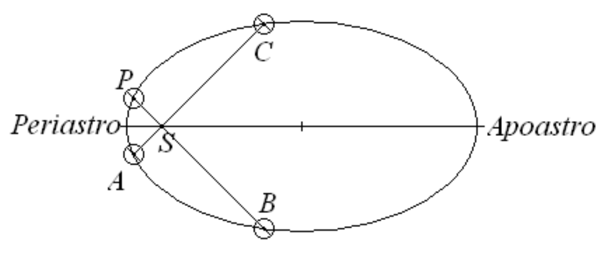


Figura relativa al quesito 1 con illustrata la posizione del pianeta nei giorni dei solstizi (P e B) e degli equinozi (A e C)

Poiché nei solstizi la proiezione dell'asse di rotazione del pianeta deve passare per la stella, per trovare la posizione del solstizio estivo basta prolungare la linea *PS* e vedere dove incontra l'orbita (punto *B*). Agli equinozi la linea *PS* (Pianeta-Stella) deve essere perpendicolare alla proiezione dell'asse di rotazione, quindi la linea *AC* deve essere perpendicolare alla linea *PB*: *A* è l'equinozio di primavera e *C* quello d'autunno. In questo caso la durata dell'inverno (tratto *BC*) è molto più lunga della durata dell'estate (*PA*), sia perché la lunghezza dell'orbita è maggiore sia perché viene percorsa più lentamente.

Quesito 2

Maggiore è l'eccentricità dell'orbita, più la posizione della stella è vicina al periastro e quindi la durata dell'estate diminuisce, mentre aumenta con il diminuire dell'eccentricità, nel caso di un'orbita che tende ad una circonferenza (*e* = 0) le quattro stagioni avrebbero la stessa durata.

Quesito 3

L'inclinazione dell'orbita non ha alcuna influenza sulla posizione de solstizi e degli equinozi, ma solo sull'ampiezza delle zone climatiche sul pianeta: maggiore è l'inclinazione, minore è l'estensione della fascia temperata (l'ampiezza della fascia temperata è data da $90° - 2a$, dove a è l'inclinazione dell'orbita) che scompare del tutto se l'inclinazione è di 45°, per inclinazioni maggiori, il circolo polare e la fascia tropicale si intersecano.

Quesito 4

Se R è il diametro della stella allora al periastro il diametro angolare è $\delta_P = 2arctg\frac{R}{SA} \approx 2\frac{R}{SA}$ radianti e all'apoastro il diametro angolare è $\delta_A = 2arctg\frac{R}{SC} \approx 2\frac{R}{SC}$ radianti. Quindi:

$$\frac{\delta_P}{\delta_A} = \frac{2\frac{R}{SA}}{2\frac{R}{SC}} = \frac{SC}{SA} = \frac{a+c}{a-c} = \frac{1{,}8a}{0{,}2a} = 9 .$$

Quesito 5

Se indichiamo con E la radiazione emessa dalla stella nell'unità di tempo, allora la radiazione che l'unità di superficie del pianeta riceve alla distanza d è $L = \frac{E}{4\pi d^2}$ da cui si ricava che

$$\frac{L_P}{L_A} = \frac{d_A^2}{d_P^2} = \left(\frac{a+c}{a-c}\right)^2 = \left(\frac{1{,}8a}{0{,}2a}\right)^2 = 81!!!$$

E' evidente che tale differenza di irraggiamento contribuisce in modo determinate alla temperatura del pianeta per cui non sarà l'inclinazione dell'asse planetario a determinare le stagioni, ma la distanza del pianeta dal sole.

Quesito 6

La situazione è illustrata in figura.

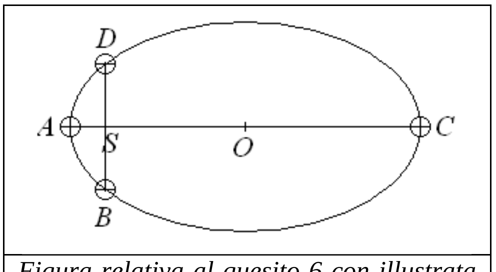


Figura relativa al quesito 6 con illustrata la posizione del pianeta nei giorni dei solstizi (A e C) e degli equinozi (B e D)

Il solstizio d'inverno è *A*, quello d'estate è *C*, mentre gli equinozi sono *B* e *D*.

La primavera è il tratto *DA*, l'estate *AB*, l'autunno *BC*, e l'inverno *CD*. Ovviamente riferito all'emisfero nord del pianeta.

Dalla simmetria della figura la primavera e l'estate hanno la stessa durata come così pure l'autunno e l'inverno.

Dalla seconda legge di Keplero si ricava che $\frac{A(SDA)}{T_{DA}} = \frac{A(SCD)}{T_{CD}} = \frac{A}{T}$ dove $A(SDA)$ e $A(SCD)$ sono le aree delle regioni *SDA* e *SCD*; T_{DA} e T_{CD} sono i periodi di percorrenza dei tratti *DA* e *CD*; *A* è l'area dell'ellisse e *T* è un anno del pianeta.

Per determinare $A(SDA)$ possiamo utilizzare la formula data sopra dove $x_1 = -a$ e $x_2 = -c$; ricordando che $c = 0{,}8a$ e $b = \sqrt{a^2 - c^2} = a\sqrt{1 - 0{,}8^2} = 0{,}6a$ i ha:

$$A = \pi ab = 0{,}6\pi a^2 = 1{,}88496a^2$$

$$A(SDA) = \frac{ab}{2}\left(arcsen\frac{x_2}{a} - arcsen\frac{x_1}{a} \right) + \frac{b}{2a}\left(x_2\sqrt{a^2 - x_2^2} - x_1\sqrt{a^2 - x_1^2} \right) =$$

$$= \frac{0{,}6a^2}{2}\left[arcsen\left(\frac{-0{,}8a}{a} \right) - arcsen\left(\frac{-a}{a} \right) \right] + \frac{0{,}6a}{2a}\left(-0{,}8a\sqrt{a^2 - (0{,}8a)^2} + a\sqrt{a^2 - a^2} \right) =$$

$$= 0{,}3a^2\left[arcsen(-0{,}8) - arcsen(-1) \right] + 0{,}3\left(-0{,}8a^2 0{,}6 \right) = 0{,}3a^2\left[arcsen(-0{,}8) + \frac{\pi}{2} \right] - 0{,}144a^2 =$$

$$= 0{,}04905a^2$$

$$A(SCD) = \frac{A}{2} - A(SDA) = 0{,}94248a^2 - 0{,}04905a^2 = 0{,}89343a^2$$

$$T_{DA} = \frac{A(SDA)}{A}T = \frac{0{,}04905a^2}{1{,}88496a^2} = 0{,}026 \text{ anni}$$

$$T_{CD} = \frac{A(SCD)}{A}T = \frac{0{,}89343a^2}{1{,}88496a^2} = 0{,}474 \text{ anni}$$

Quindi la primavera e l’estate durano 0,026 anni, mentre l’autunno e l’inverno durano 0,474 anni.

PIANETA ECCENTRICO

Nel romanzo di fantascienza di Poul Anderson, *Circus of Hell* (Scacchiera fra le stelle) del 1970, si parla del pianeta Talwin che orbita intorno alla stella Siekh con un'orbita molto eccentrica "*E' il pianeta più eccentrico di cui abbia mai sentito parlare. Uhm … circa una metà, no?*" dice il protagonista. In un'altra parte del romanzo si dice che la durata dell'anno di Talwin è di circa 2 anni terrestri, che praticamente l'asse di rotazione è perpendicolare al piano orbitale ("*l'inclinazione è di soli tre gradi*") e che al periastro si trova a 0,87 UA, mentre all'apoastro a 2 UA. Il periodo di rotazione del pianeta è di 18 ore. Questa eccentricità fa sì che le stagioni siano dovute alla posizione del pianeta lungo l'orbita; così scrive l'autore: "*Talwin girava intorno a Siekh in un'ellisse eccentrica che, naturalmente, aveva il sole in uno dei fuochi. Si poteva definire l'estate arbitrariamente in questo modo: bisogna tirare una linea attraverso quel fuoco, normale all'asse maggiore, intersecante la curva in due punti. L'estate era il periodo di sei mesi durante il quale Talwin passava da uno di questi punti, attraverso il periastro, fino all'altra estremità del segmento. L'autunno era costituito dalle sei settimane o giù di lì che il pianeta impiegava per passare da questo punto alla più vicina intersecazione dell'asse minore con l'ellisse. L'inverno occupava i quindici mesi in cui Talwin raggiungeva la distanza massima e ritornava all'intersezione opposta con l'asse minore. Poi la primavera occupava altre sei settimane, fino a quando il pianeta raggiungeva il punto che definiva l'inizio dell'estate.*"

1. Determinare
    a. la massa di Siekh in masse solari
    b. la durata dell'anno di Talwin in giorni di Talwin
    c. il rapporto delle dimensioni angolari massime e minime del disco di Siekh.

2. Verificare se le durate delle stagioni sono corrette.

SOLUZIONE

Quesito 1.a

Il semiasse maggiore dell'ellisse, *a*, è dato da $a = \frac{a_P + a_A}{2}$ e dai dati si ricava *a* = 1.435 UA.

Dalla terza legge di Keplero $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_S}$, si ha: $\frac{T^2_{Talwin}}{a^3_{Talwin}} M_{Siekh} = \frac{T^2_{Terra}}{a^3_{Terra}} M_{Sole}$.

Misurando il tempo in anni e il semiasse maggiore in unità astronomiche si ha: $\frac{2^2}{1.435^3} M_{Siekh} = M_{Sole}$ da cui segue che $M_{Siekh} = 0.739 M_{Sole}$.

Quesito 1.b

L'anno di Talwin (a_{Talwin}) è pari a 2 anni terrestri (a_{Terra}) e un giorno di Talwin (g_{Talwin}) è pari a 16 ore (*h*). Si ha:

$a_{Talwin} = 2a_{Terra} = 730 g_{Terra} = 17520h$

$g_{Talwin} = 16h$

per cui

$a_{Talwin} = 2a_{Terra} = 730 g_{Terra} = \frac{17520}{16} g_{talwin} = 1095 g_{talwin}$

Quesito 1.c

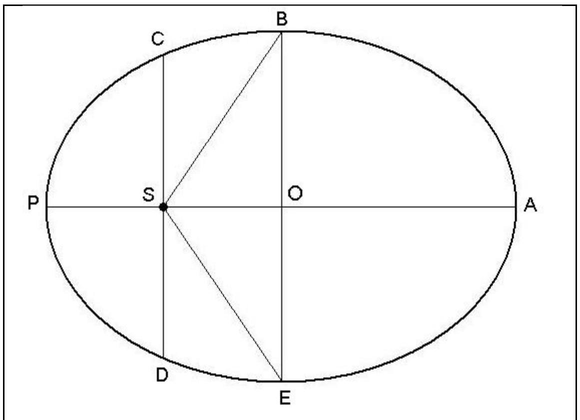
Le dimensioni angolari di Siekh saranno massime quando Talwin è al periastro e minime quanto sarà all'apoastro.

Se indichiamo con d il diametro di Siekh e con r la distanza generica di Talwin, il diametro angolare δ di Siekh visto da Talwin è dato da: $\delta = 2arctg\frac{d}{2r}$. Essendo ragionevole supporre che la distanza del pianeta sia molto maggiore del diametro della stella, si ha:

$$\frac{\delta_P}{\delta_A} = \frac{2arctg\frac{d}{2a_P}}{2arctg\frac{d}{2a_A}} \approx \frac{\frac{d}{a_P}}{\frac{d}{a_A}} = \frac{a_A}{a_P} = 2.3\,.$$

Quesito 2

L'orbita di Talwin, in scala, è data nella figura dove, come indicato nel romanzo, sono stati segnati i punti in cui iniziano le stagioni: in C inizia l'estate, in D l'autunno, in E l'inverno e in B la primavera.



Orbita di Talwin con indicati i punti in cui, secondo il romanzo, iniziano le stagioni.

Per il calcolo delle loro durate utilizziamo la seconda legge di Keplero: poiché il raggio vettore del pianeta spazza aree uguali in tempi uguali allora rapporto tra area spazzata e tempo impiegato a spazzarla è una costante. Indichiamo con A_E, A_A, A_I, A_P e T_E, T_A, T_I, T_P rispettivamente le aree e i tempi impiegati in estate, autunno, inverno e primavera, si ha:

$$\frac{A_E}{T_E} = \frac{A_A}{T_A} = \frac{A_I}{T_I} = \frac{A_P}{T_P} = \frac{A}{T} = k$$

Dove A e T sono rispettivamente l'area dell'ellisse e il periodo di rivoluzione di Talwin.

Essendo l'eccentricità e = 0.5, dalla sua definizione, $e = \frac{c}{a}$, si ricava che $c = e \cdot a = 0{,}5a$ dove a è il semiasse maggiore dell'ellisse e c è la distanza dei fuochi dell'ellisse dal centro (SO; c = 0,7175 UA).

Per evitare inutili calcoli algebrici, nella risoluzione del problema faremo i calcoli in funzione del semiasse maggiore.

Dalle definizioni generali sull'ellisse si ricava che il semiasse minore (OB) b è dato da:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = a\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

L'area dell'ellisse è quindi $A = \pi ab = \pi\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$.

La costante k è: $k = \frac{A}{T} = \pi\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. Dove T è espresso in anni.

Il calcolo più semplice è quello relativo alla durata dell'inverno. Infatti l'area spazzata dal raggio vettore nel tratto EAB dell'ellisse è data da metà ellisse più l'area del triangolo isoscele BSE:

$$A_I = \frac{1}{2}A + b \cdot c = \pi\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \left(a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}a\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2(\pi+1)\ .$$

La durata dell'inverno è quindi $T_I = \frac{A_I}{k} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2(\pi+1)}{\pi\frac{\sqrt{3}}{4}a^2} = \frac{\pi+1}{\pi} = 1{,}318$ anni, che corrisponde a circa 481 giorni ossia circa 16 mesi un po' di più di quello che viene indicato nel romanzo.

Il calcolo della durata dell'estate è un po' più difficile in quanto bisogna utilizzare il calcolo integrale (come per il punto 6 del problema precedente). Di seguito riporto il calcolo, ma si può utilizzare la formula data sopra.
Se fissiamo un sistema di riferimento cartesiano nel centro dell'ellisse con l'asse x che contiene i fuochi, allora l'equazione dell'ellisse è: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ che nel nostro caso diventa: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{4y^2}{3a^2} = 1$.
Esplicitando rispetto a y e prendendo la parte positiva (si tratta di considerare la semi-ellisse al di sopra dell'asse x) si ha: $y = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{a^2 - x^2}$

$$A_E = 2\int_{-a}^{-c}\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \sqrt{3}\int_{c}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \sqrt{3}\int_{\frac{1}{2}a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \sqrt{3}\left[\frac{a^2}{2}arcsen\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}\right]_{\frac{1}{2}a}^{a} =$$

$$= \frac{\left(4\pi\sqrt{3}-9\right)a^2}{24}$$

Utilizzando la formula si deve mettere $x_1 = -a$, $x_2 = -c = -\frac{1}{2}a$ e $b = a\frac{\sqrt{3}}{2}$ e moltiplicare per 2, si ha:

$$A_E = 2\left[\frac{a}{2}a\frac{\sqrt{3}}{2}\left(arcsen\left(-\frac{1}{2}\right) - arcsen(-1)\right) + \frac{1}{2a}a\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{2}a\sqrt{a^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2} + a\sqrt{a^2-a^2}\right)\right] =$$

$$= \frac{\left(4\pi\sqrt{3}-9\right)a^2}{24}$$

La durata dell'estate è: $T_E = \frac{A_E}{k} = \frac{\frac{\left(4\pi\sqrt{3}-9\right)a^2}{24}}{\pi\frac{\sqrt{3}}{4}a^2} = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{6\pi} = 0{,}3910$ anni, che corrisponde a circa 143 giorni, ossia 4 mesi e 23 giorni; un po' meno di quello che viene indicato nel romanzo.

Il calcolo della durata della primavera e dell'autunno può essere fatto semplicemente come differenza
$T_P = T_A = \frac{T - (T_I + T_E)}{2} = \frac{2 - (1.318 + 0.3910)}{2} = 0{,}1455$ anni, che corrisponde a 53 giorni, ossia 1 mese e 23 giorni; in questo caso un po' di più di quanto previsto nel romanzo.

In modo alternativo il calcolo può essere fatto valutando l'area con un integrale (o con la formula data nel problema precedente), ossia l'area del segmento di ellisse BCDE meno quella del triangolo

BSE diviso 2.

$$A_P = A_A = \frac{1}{2}\left[2\int_{-c}^{0}\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{a^2-x^2}\,dx-\left(a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}a\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\sqrt{3}\int_{-\frac{1}{2}a}^{0}\sqrt{a^2-x^2}\,dx-\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{3}\left(2\pi+3\sqrt{3}\right)}{24}a^2-\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right]=\frac{\sqrt{3}\left(2\pi+3\sqrt{3}-6\right)}{48}a^2$$

$$T_P = T_A = \frac{A_P}{k} = \frac{\dfrac{\sqrt{3}\left(2\pi+3\sqrt{3}-6\right)}{48}a^2}{\pi\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2} = \frac{\left(2\pi+3\sqrt{3}-6\right)}{12\pi} = 0{,}1453 \text{ anni.}$$

Sono sempre 53 giorni, ma il risultato è leggermente diverso a causa delle maggiori approssimazioni che si fanno con l’altro calcolo.

Questi risultati fanno pensare che Poul Anderson avesse fatto i calcoli cosa di cui era capace essendo laureato in fisica.